

Modul 3	Leitfrage/Leitgedanke	Leitziele der Stunde <i>Die SchülerInnen...</i>	Hinweise zum Inhalt	Material
<b>Kapitel I</b>	<b>Vektoren als n-Tupel</b>			
<b>Phase 1</b> (M3.I.1) 4h+ 1h üben <a href="#">(Math2Mind, EdM 2017 LK, S. 31 A. 2, S. 36 A. 1-3, S. 39, 40)</a>	Was ist ein Vektor und für was nutzt man ihn?  <b>Kontext:</b> <i>rgb-Farbvektor &amp; Übertragung auf Einkaufsliste, Mobilität, Instagram-Ranking</i>  Vortragsfolien Kap	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <i>entwickeln den Begriff Vektor als n-Tupel in Sachzusammenhängen</i></li> <li>■ <i>verstehen und verwenden in Sachzusammenhängen die Vektoraddition und die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl (GK, LK)</i></li> <li>■ <i>verstehen und verwenden die Begriffe Linearkombination und linear (un-) abhängig (GK, LK)</i></li> </ul>	Am Bsp. der Farbcodierung $r, g, b$ von Pixeln werden Vektoren eingeführt und als $n$ -Tupel notiert. Am Beispiel der Grautöne wird die komponentenweise Multiplikation mit einem Faktor erarbeitet. Das Mischen von Farben führt zur Addition von Vektoren sowie Linearkombinationen. Anhand der Frage, welche Farben sich aus zwei bestimmten Farben mischen lassen, wird lineare Unabhängigkeit erarbeitet. Die Berechnungen zur LU werden mit GeoGebra entlastet, LGS werden aber noch nicht thematisiert. Es folgt eine Übertragung auf andere Kontexte (Keksrezepte, Mobilitätsstatistik und Instagram-Ranking). Darauf aufbauend können Vektoren, Addition, Multiplikation mit einer reellen Zahl, Linearkombination und lineare Unabhängigkeit formal definiert werden.	<a href="#">M3.I.1a AB</a> <a href="#">M3.I.1b AB</a> <a href="#">M3.I.1c AB</a> <a href="#">M3.I.1d AB</a>
<b>Phase 2</b> (M3.I.2) 2h+ 1h üben <a href="#">(Math2Mind, EdM 2017 LK, S. 46 A. 3)</a>	Wie kann man zwei Vektoren multiplizieren und was bedeutet das Ergebnis?  <b>Kontext:</b> <i>Einkaufsliste &amp; Übertragung auf Grauwert des Farbvektors, Emissionen, Instagram</i>  Vortragsfolien Kap	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <i>verstehen die Definition und Eigenschaften des Skalarprodukts (LK)</i></li> <li>■ <i>bestimmen das Skalarprodukt zweier Vektoren (GK)</i></li> </ul>	Im Kontext „Kekse backen“ entwickeln die SuS intuitiv selbst die Rechenvorschrift für das Skalarprodukt (Einkaufsliste * Preisliste = Gesamtpreis). Zur Verdeutlichung der skalaren Eigenschaft generieren die SuS Möglichkeiten aus einem Farbvektor einen einzigen Zahlenwert zu erstellen, der den Grauwert angibt (Schwarz-Weiß-Druck von Farbbildern). Ein Luminanzvektor mit der wahrgenommenen Helligkeit der Grundfarben führt dann auf das Skalarprodukt. In den Kontexten Mobilität & Instagram festigen die SuS die Summe der komponentenweisen Produkte zweier Vektoren. Darauf aufbauend wird das Skalarprodukt definiert. Optional können Dimensionalität und Basis eines Vektorraums über alternative Grundfarben angesprochen werden.	<a href="#">M3.I.2a AB</a> <a href="#">M3.I.2b AB</a> <a href="#">M3.I.2c AB</a>
<b>*Phase 3</b> (*M3.I.3) optional 2 h	Beschreiben Vektoren immer Eigenschaften und Zustände?  <b>Kontext:</b> <i>Videokompression</i>  Vortragsfolien Kap	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <i>nutzen Vektoren, um Zustände und Änderungen zu beschreiben</i></li> </ul>	Vektoren beschreiben Zustände und Änderungen. Während der $rgb$ -Farbvektor den Zustand eines Bildpunkts (Pixels) beschreibt, bietet das Beispiel der Kompression von Videodaten die Möglichkeit Vektoren ( $n$ -Tupel) zur Beschreibung von Änderungen zu erfahren (das MPEG-Format speichert in Videos bei Folgebildern nur die Änderungen) – das bereitet auf die geometrische Deutung eines Vektors als Punkt (Zustand) und Pfeil (Änderung) in Kapitel III vor.	<a href="#">*M3.I.3 AB</a>

Modul 3	Leitfrage/Leitgedanke	Leitziele der Stunde <i>Die SchülerInnen...</i>	Hinweise zum Inhalt	Material
<b>Kapitel II</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>			
<b>Phase 4</b> (M3.II.4) <i>1h+ 1h üben</i> (EdM 2017 LK, S.12, 14-18; LS 2012, S. 8-33)	Wie hängen Vektoren mit LGS zusammen?  <b>Anknüpfungspunkt Kap I:</b> <i>Linearkombinationen</i>  <i>Vortragsfolien Kap</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <i>lösen lineare Gleichungssysteme. (GK, LK)</i></li> <li>■ <i>geben Lösungsmengen von LGS mit mehr als einer Lösung an und interpretieren. (LK)</i></li> </ul>	Anknüpfend an Kap I wird die Gleichung einer Linearkombination von Vektoren zeilenweise interpretiert, damit ein LGS aufgestellt und mit <code>Löse()</code> sowie der Option <code>Lösen</code> aus dem Kontextmenü in GeoGebra gelöst. Damit ist eine Verbindung zu linearen Gleichungssystemen geschaffen.	<a href="#">M3.II.4 AB</a>
<b>Phase 5</b> (M3.II.5) <i>2h + 1h üben</i> (EdM 2017 LK, S.12, 14-18; LS 2012, S. 8-33)	Wie kann ich systematisch die Lösung eines Gleichungssystems (mit mehr als zwei Variablen) ermitteln?  <i>Vortragsfolien Kap</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <i>lösen lineare Gleichungssysteme. (GK, LK)</i></li> <li>■ <i>stellen zu einer Problemstellung ein LGS auf (GK, LK)</i></li> <li>■ <i>geben Lösungsmengen von LGS mit mehr als einer Lösung an und interpretieren diese (LK)</i></li> <li>■ <i>verstehen das Gauß-Verfahren als Bsp. für algorithmische Problemlösung (LK)</i></li> </ul>	Gemeinsam mit den SuS wird das Gauß-Verfahren (optional das erweiterte Gauß-Jordan-Verfahren) zur Lösung von linearen Gleichungssystemen per Hand erarbeitet und die Lösungsmenge interpretiert. Die erweiterte Koeffizientenmatrix wird als Kurzschreibweise vorgestellt und der dazu passende Befehl <code>Treppennormalform()</code> in GeoGebra eingeführt. Die SuS setzen GeoGebra zur Fehlersuche in einer gegebenen Lösung ein. In Übungen setzen sie das Verfahren in Sachzusammenhängen ein.	<a href="#">M3.II.5a AB</a> <a href="#">M3.II.5b AB</a>
<b>*Phase 6</b> (M3.II.6) <b>optional</b> <i>2 h</i>	Lässt sich ein LGS mit drei Unbekannten veranschaulichen?  <i>Vortragsfolien Kap</i>  <b>Anknüpfungspunkt Sek I:</b> <i>LGS mit 2 Unbekannten geometrisch als Geraden</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <i>deuten die vom Lösen linearer Gleichungssysteme mit drei Variablen bekannten Fälle „eine Lösung“, „keine Lösung“ oder „unendlich viele Lösungen“ geometrisch (GK, LK)</i></li> <li>■ <i>wissen, dass eine Koordinatengleichung mit drei Variablen eine Ebene beschreibt (GK, LK)</i></li> </ul>	Anschließend an die geometrische Deutung von Gleichungen mit zwei Unbekannten als Geraden in der Sek I, stellen die SuS mithilfe von GeoGebra die einzelnen Gleichungen eines LGS mit drei Unbekannten geometrisch als Ebenen dar. Die Koordinatengleichung der Ebene wird hier durch GeoGebra interpretiert. Die genaue Erarbeitung der Ebenengleichungen findet erst im Wahlbereich A2 statt. Die SuS können aber die geometrische Deutung der Gleichungen als Ebenen über die Anzahl der Unbekannten (zwei Freiheitsgrade im Raum) nachvollziehen. Sie untersuchen geometrisch die Fälle keine, genau eine sowie unendliche viele Lösungen des LGS und treffen Aussagen zur möglichen Lage der Ebenen. Optional kann hier das Gauß-Jordan-Verfahren graphisch dargestellt und diskutiert werden.	<a href="#">M3.II.6 AB</a>

Modul 3	Leitfrage/Leitgedanke	Leitziele der Stunde <i>Die SchülerInnen...</i>	Hinweise zum Inhalt	Material
<b>Kapitel III</b>	<b>Geometrische Deutung</b>			
<b>Phase 7</b> (M3.III.7) <i>2h + 1h üben</i> (LS 2012, S. 44-46; EdM 2017 LK, S. 48-51)	Wie kann man sich Vektoren veranschaulichen?  <b>Anknüpfungspunkt Sek I:</b> Zahlengerade  <b>Kontext:</b> rgb-Farbvektor  Vortragsfolien Kap	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <i>fassen Pfeile und Punkte als geometrische Deutung von Vektoren auf</i></li> <li>■ <i>deuten Vektoren im Sachzusammenhang geometrisch</i></li> <li>■ <i>deuten linear abhängige Vektoren geometrisch</i></li> </ul>	Ausgehend von der Punkt- und Pfeil-Deutung von Zahlen auf der Zahlengeraden werden <b>Vektoren geometrisch als (Zustands-)Punkte und (Änderungs-)Pfeile</b> gedeutet. Die SuS erkunden erst ein Applet in 2D und üben dann den Umgang mit GeoGebra 3D. Die Vektoraddition wird ebenfalls ausgehend von der Deutung der Addition an der Zahlengeraden sowohl als Punkt+Pfeil (Zustandsänderung), als auch als Pfeil+Pfeil (Gesamtänderung) zunächst in 2D, dann in 3D gedeutet. Der Verständnisanker rgb-Farbvektor wird im Farbwürfel als Punkt und Pfeil gedeutet und die Einschränkungen des Modells diskutiert. Die Linearkombination aus den drei Grundfarbvektoren wird als Pfeiladdition dargestellt. Anhand von Graustufen wird erarbeitet, dass linear abhängige Vektoren als Punkte gedeutet auf einer Geraden liegen. Mit dem CMY-Farbraum wird optional ein Basiswechsel geometrisch dargestellt, was die flexible Lage des Koordinatensystems für geometrische Anwendungen motivieren soll.	<a href="#">M3.III.7a AB</a> <a href="#">M3.III.7b AB</a> <a href="#">M3.III.7c AB</a> * <a href="#">M3.III.7d AB</a>
<b>Phase 8</b> (M3.III.8) <i>3h + 2h üben</i> (LS 2012, S. 119; EdM 2017 LK, S. 48-51)	Was bedeutet das Skalarprodukt geometrisch?  <b>Kontext:</b> rgb-Farbvektor  Vortragsfolien Kap	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <i>verstehen die Definition und Eigenschaften des Skalarprodukts (LK)</i></li> <li>■ <i>deuten das Skalarprodukt geometrisch</i></li> <li>■ <i>wenden das Skalarprodukt in geometrischen Fragestellungen an (GK)</i></li> </ul>	Die alternative Festlegung für die Helligkeit eines Farbvektors führt auf die Länge des Pfeils bzw. den Abstand des Punkts zum Ursprung und zur Einführung des Betrags eines Vektors – zunächst in 2D, dann in 3D. Dann werden geometrische Eigenschaften des Skalarprodukts zunächst in 2D erkundet. Im Mobilitätskontext wird die Ergebnisgleichheit geometrisch untersucht. Im Farbkontext wird dann die Projektion und der Zusammenhang zum eingeschlossenen Winkel erarbeitet. Das Skalarprodukt sollte anschließend in geometrischen Fragestellungen angewendet werden. Zum Abschluss des Kapitels sollten elementargeometrische Beweise aus der Sek I vektoriell geführt werden.	<a href="#">M3.III.8a AB</a> <a href="#">M3.III.8b AB</a> <a href="#">M3.III.8c AB</a> * <a href="#">M3.III.8d AB</a>

Modul 3	Leitfrage/Leitgedanke	Leitziele der Stunde <i>Die SchülerInnen...</i>	Hinweise zum Inhalt	Material
<b>Kapitel IV</b>	<b>A1: Matrizen</b>			
<b>Phase 9</b> (M3.IV.9) <i>2h + 1h üben</i> (LS 2012, S. 176-178; EdM 2017 LK, S. 185-189)	Wie lässt sich ein dynamischer Prozess mathematisch darstellen?  <b>Kontext:</b> Streaming-Dienst  <i>Vortragsfolien Kap</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <i>beschreiben Übergangsprozesse mit Übergangsgraphen, -tabellen und Baumdiagrammen</i></li> <li>■ <i>nutzen diese Darstellungen und GeoGebra/Tabellenkalkulation, um Prozessschritte zu berechnen</i></li> </ul>	Am Beispiel der Kundenwanderung zwischen zwei Streaming-Diensten wird ein Übergangsprozess zunächst in eine Übergangstabelle und daraus in einen Übergangsgraph übersetzt. Die Kundenzahlen der zwei folgenden Monate werden berechnet und in einem Baumdiagramm dargestellt. Die Berechnung nach weiteren Monaten erfolgt dann systematisch in GeoGebra bzw. Tabellenkalkulation.	<a href="#">M3.IV.9 AB</a>
<b>Phase 10</b> (M3.IV.10) <i>2h + 1 üben</i> (LS 2012, S. 176-178; EdM 2017 LK, S. 190-193)	Wie entwickelt sich die Kundenverteilung langfristig?  <b>Kontext:</b> Streaming-Dienst  <i>Vortragsfolien Kap</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <i>wenden das Produkt einer Matrix mit einem Vektor in nicht-geometrischen Sachbezügen an (GK, LK)</i></li> <li>■ <i>wenden das Produkt zweier Matrizen und Matrixpotenzen in nichtgeometrischen Sachbezügen an (GK, LK)</i></li> </ul>	Die Berechnungen werden mithilfe von Übergangsmatrix und Bestandsvektoren schematisiert und aus dem Vergleich mit der bisherigen Berechnung das Produkt Matrix*Vektor definiert. Die Berechnung in GeoGebra führt auf die Definition von Matrizenmultiplikation und Matrixpotenzen (2x2-Herleitung durch iterative Berechnung). Die Frage nach einem stabilen Bestandsvektors führt auf eine Matrixgleichung (nicht eindeutig lösbar), die mit der Zusatzbedingung Kundensumme gelöst werden kann. Optional wird die Grenzmatrix mit dem stabilen Bestandsvektor als Spaltenvektoren hergeleitet.	<a href="#">M3.IV.10 AB</a>
<b>Phase 11</b> (M3.IV.11) <i>2h + 1 üben</i> (LS 2012, S. 169; BK 2010 384-389)	Lassen sich auch Zustände vor dem Startzustand berechnen?  <b>Kontext:</b> Verschlüsselung	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <i>wenden inverse Matrizen in nicht-geometrischen Sachbezügen an (GK, LK)</i></li> </ul>	Die Frage nach den Zuständen vor Beobachtungsbeginn führt auf eine Matrixgleichung, deren Lösung inverse Matrizen motiviert und die Einheitsmatrix definiert. Bei der Frage nach der Invertierbarkeit kann die Determinante eingeführt werden. Als Kontext zur Herleitung der Inversen eignet sich das Ver- und Entschlüsseln von Texten.	<a href="#">*M3.IV.11 AB</a>
<i>Ausblick weiterer Unterricht</i>		<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <i>nutzen Vektoren und Matrizen zur Beschreibung geometr. Abbildungen (LK)</i></li> <li>■ <i>erfahren, dass Matrizen zur Beschreibung geometrischer Abbildungen dienen (GK)</i></li> <li>■ <i>beweisen Eigenschaften affiner Abbildungen (LK)</i></li> <li>■ <i>verstehen Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen als spezielle affine Abbildungen (LK)</i></li> </ul>	<i>An dieser Stelle sollten im Vertiefungsbereich noch weitere Inhalte erarbeitet werden, zu denen die Handreichung von MaTeGnu kein explizites Material bietet. Dazu gehören Matrizen zur Beschreibung von affinen Abbildungen und Fixelemente (Determinanten, ggf. Eigenvektoren und -werte).</i>	

Modul 3	Leitfrage/Leitgedanke	Leitziele der Stunde <i>Die SchülerInnen...</i>	Hinweise zum Inhalt	Material
<b>Kapitel V</b>	<b>A2: Geraden und Ebenen im Raum</b>			
<b>Phase 12</b> (M3.V.12) <i>2h + 1 üben</i> (LS 2012, S. 47-50; EdM 2017 LK, S. 52-58)	Wie lassen sich Geraden mit Vektoren beschreiben?  <i>Vortragsfolien Kap</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>verstehen die Parameterform der Geradengleichung (GK, LK)</li> </ul>	Ausgehend von Geraden als Punktmengen wird die Parameterform der Geradengleichung in 2D erarbeitet und auf 3D erweitert. Parallel sollte unbedingt gegenständlich eine Vorstellung erarbeitet werden (Stab stabil halten mit zwei Stützpunkten, Rückgriff auf Sek I).	<a href="#">M3.IV.12 AB</a>
<b>Phase 13</b> (M3.V.13) <i>2h + 1 üben</i> (LS 2012, S. 51-55; EdM 2017 LK, S. 59-67)	Schneiden sich zwei Geraden im Raum immer?  <i>Vortragsfolien Kap</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>bestimmen die gegenseitige Lage von Geraden (GK, LK) und begründen die Verfahren (LK)</li> </ul>	Lagebeziehungen von Geraden können durch Anpassung der Materialien des digitalen Schulbuchs o-mathe.de behandelt werden. Abstandsberechnungen werden nicht an dieser Stelle, sondern nach Einführung der Ebenen in Phase 17 durchgeführt.	
<b>Phase 14</b> (M3.V.14). <i>3h + 1h üben</i> (LS 2012, S. 72-82; EdM 2017 LK, S. 80-85, S. 92-96, S. 96-99)	Lassen sich Ebenen mit Vektoren beschreiben?  <i>Vortragsfolien Kap</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>verstehen die Parameterform der Ebenengleichung (GK, LK)</li> <li>kennen die Normalengleichung der Ebene &amp; wenden sie an (GK)</li> <li>kennen Definition &amp; Eigenschaften des Vektorprodukts (LK)</li> </ul>	Mit Rückgriff auf die Geradengleichung wird die Parameterform der Ebenengleichung erarbeitet. Parallel sollte gegenständlich eine Vorstellung erarbeitet werden (Pappe stabil halten mit drei Stützpunkten). Mit Rückgriff auf Phase 6 wird die Koordinatenform der Ebenengleichung explizit eingeführt und die Umrechnung von dieser zur Parameterform erarbeitet. Mit Anpassung der Materialien des digitalen Schulbuchs o-mathe.de kann (parallel gegenständlich) die Normalenform der Ebenengleichung und dazu das Vektorprodukt erarbeitet werden.	<a href="#">M3.IV.14a AB</a> <a href="#">M3.IV.14b AB</a>
<b>Phase 15</b> (M3.V.15) <i>2h + 1 üben</i> (LS 2012, S. 104-117; EdM 2017 LK, S. 113-119, S. 120-132, S. 104-112)	Wie lässt sich Abstand im Dreidimensionalen verstehen?  <i>Vortragsfolien Kap</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>berechnen Winkel und Abstände im Raum (LK)</li> <li>leiten Kreis- und Kugelgleichung her und wenden diese zur Untersuchung von Lagebeziehungen an (LK)</li> </ul>	Mit Rückgriff auf Phase 6 werden Lagebeziehungen von Ebenen vertieft und die Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen erarbeitet. Zum Abstandsbegriff werden mit Applets die Grundvorstellungen senkrechte Verbindung, kürzeste Verbindung und Radius des Berührungskreises (der Berührungskugel) erarbeitet. Alternativ kann der Abstandsbegriff auch als offene Problemstellung mit Ideenkarten eigenständig erarbeitet werden.	<a href="#">M3.IV.15a AB</a> <a href="#">M3.IV.15b AB</a>
<b>*Phase 16</b> (M3.V.16) <i>3h</i> (EdM 2017 LK, S. 70-71)	Elementargeometrische Anwendungen  <i>Vortragsfolien Kap</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>untersuchen elementargeometrische Sätze und Zusammenhänge analytisch (LK)</li> </ul>	Die SuS berechnen mithilfe von Vektoren den Schwerpunkt eines Dreiecks in allgemeiner Form und beweisen anschließend analytisch den Satz aus der Mittelstufe. Hier stellen Vektoren als n-Tupel eine deutliche Vereinfachung gegenüber dem Pfeilklassenmodell dar.	<a href="#">M3.IV.16 AB</a>
<b>*Phase 17</b> (M3.V.17) <i>3h</i>	Objektstudie Rhombendodekaeder  <i>Vortragsfolien Kap</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>berechnen Winkel und Abstände im Raum (LK)</li> <li>kennen Definition &amp; Eigenschaften des Vektorprodukts (LK)</li> </ul>	Bei der Bearbeitung der verschiedenen Problemstellungen zum Rhombendodekaeder vernetzen die SuS ihr Wissen quer durch die analytische Geometrie sowie aus der Sekundarstufe I. Dabei bietet sich die Einführung des Vektorprodukts an und der Vorstellung als Projektion senkrecht zu beiden Vektoren sowie des Betrags als Flächeninhalt des von beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms.	<a href="#">GGB-Buch</a>

Modul 3	Leitfrage/Leitgedanke	Leitziele der Stunde <i>Die SchülerInnen...</i>	Hinweise zum Inhalt	Material
---------	-----------------------	--	---------------------	----------

## Lehrwerke:

LS 2012 – Lambacher Schweizer Analytische Geometrie und lineare Algebra 2012

EdM 2017 LK – Elemente der Mathematik Lineare Algebra/Analytische Geometrie Rheinland-Pfalz 2017 Leistungskurs

BK 2010 – Bigalke & Köhler Gymnasiale Oberstufe 2010